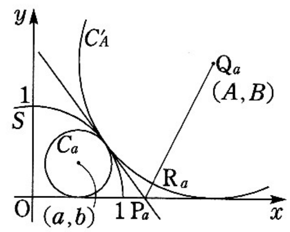
# 難関大学を目指そう！　極限プリント　3枚目



## No. 11 図形と極限




$xy$ 平面上の半円 $y=\sqrt{1-x^2}$　$(-1\leqq x\leqq 1)$ をSとする。$x$ 軸の $0<x<1$ の部分とSとの両方に接する円の中心が $(a、b)$ のとき、その円を $C_a$ とあらわす。$x$ 軸の $x>1$ の部分とSとの両方に接する円の中心が $(A、B)$ のとき、その円を $C'_A$ と表す。さらに、図に示すように、2つの円 $C_a(0<a<1)$ と $C'_A(A>1)$ とが互いに接しているとする。

(1)　$b$ を $a$ の式で表し、$B$ を $A$ の式で表せ。

(2)　$A$ を $a$ の式で表せ。

(3)　$C_a$ と $C'_A$ の接点におけるこれらの円の共通接線と、$x$ 軸との交点を $P_a$ とし、円 $C'_A$ の中心を $Q_a$ とするとき、$P_aQ_a$ を $a$ の式で表せ。

(4)　線分 $P_aQ_a$ と円 $C'_A$ との交点を $R_a$ とするとき、$\lim_{a\to 0} P_aR_a$ の値を求めよ。　（中央大）

## No. 12 解けない漸化式の極限と不等式　関数の極限編

すべての自然数 $n$ について、$0<a_n<1$ となる数列 $\{a_n\}$ が、$a_1=\dfrac{3}{4}$、および漸化式

$$a_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-a_n}}{2}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たしているとする。

(1)　$a_n=\sin^2\theta_n\ \left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}、n\geqq 1\right)$ とおく。$\theta_1$ の値を求め、数列 $\{\theta_n\}$ の漸化式を導け。

(2) (1)で与えられた数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} 2^{2n}a_n$ を求めよ。　（関西大）

## No. 13 解けない漸化式の極限と不等式　分子の有理化編

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$、　$a_{n+1}=\sqrt{36+5a_n}$　$(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられているとする。また、$f(x)=\sqrt{36+5x}-x$ とし、$x$ に関する方程式、$f(x)=0$ の正の解を $a$ とする。

(1)　$a$ の値を求めよ。

(2)　すべての正の整数 $n$ について、$a_n\leqq a$ であることを証明せよ。

(3)　$b_n=a-a_n$ とするとき、すべての正の整数 $n$ について、$b_{n+1}\leqq\dfrac{1}{3}b_n$ であることを証明せよ。

(4)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ。　（熊本大）

## No. 14 解けない漸化式の極限と不等式　まとめ

$b$ は正の実数で、$\{a_n\}$ は、$a_1=b$、$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}+1+n^2$　$(n=1,2,3,\cdots)$ で定まる数列とする。

(1)　$b=1$ のとき、一般項 $a_n$ を $n$ の式で表せ。

(2)　$b=2$ のとき、$a_n\leqq cn^2$　$(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つような、$n$ によらない定数 $c$ が存在することを証明せよ。

(3)　$b$ がどのような正の実数であっても、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=1$ であることを証明せよ。

（千葉大）